Conjuntos – PARTE III

Raquel de Souza Francisco Bravo

e-mail: raquelbr.ic@gmail.com

06 de setembro de 2016

Número de elementos de um conjunto

Conteúdo:

- Conceitos iniciais
- Introdução ao princípio aditivo
- Introdução ao princípio da inclusão e exclusão

Conceitos iniciais:

- Faz sentido saber quantos elementos tem um conjunto?

Conceitos iniciais:

- Faz sentido saber quantos elementos tem um conjunto?

- É sempre possível contar os elementos de um conjunto?

Conceitos iniciais:

- Faz sentido saber quantos elementos tem um conjunto?

- É sempre possível contar os elementos de um conjunto?

- Tem uma fórmula para calcular o número de elementos de $A \cup B$?

Questão 1:

Faz sentido saber quantos elementos tem um conjunto?

Exemplo 1:

O vaqueiro João cuida das vacas da fazenda "Três Irmãos". Ele leva as vacas para pastar nos campos fora da fazenda. Ele não pode perder nenhuma vaca. Então o que ele faz ?

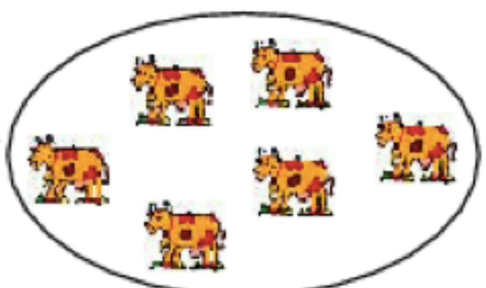
Questão 1:

Faz sentido saber quantos elementos tem um conjunto?

Exemplo 1:

O vaqueiro João cuida das vacas da fazenda "Três Irmãos". Ele leva as vacas para pastar nos campos fora da fazenda. Ele não pode perder nenhuma vaca. Então o que ele faz ? Conta as vacas que formam o gado antes e depois do pastoreio.

Conjunto de vacas antes do pastoreio.



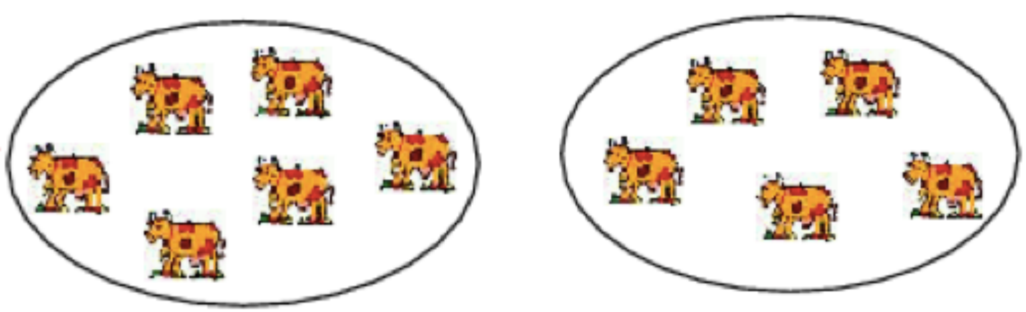
Questão 1:

Faz sentido saber quantos elementos tem um conjunto?

Exemplo 1:

O vaqueiro João cuida das vacas da fazenda "Três Irmãos". Ele leva as vacas para pastar nos campos fora da fazenda. Ele não pode perder nenhuma vaca. Então o que ele faz ? Conta as vacas que formam o gado antes e depois do pastoreio.

Conjunto de vacas antes do pastoreio.



Conjunto de vacas depois do pastoreio.

Questão 1:

Faz sentido saber quantos elementos tem um conjunto?

Exemplo 2:

Você deu dez notas de R$ 2,00 para um amigo fazer compras. No retorno, você contou o dinheiro que sobrou (3 notas de R$ 2,00).

Questão 1:

Faz sentido saber quantos elementos tem um conjunto?

Exemplo 2:

Você deu dez notas de R$ 2,00 para um amigo fazer compras. No retorno, você contou o dinheiro que sobrou (3 notas de R$ 2,00).

Resposta: SIM

⇨ Notação:

n(A): é o número de elementos do conjunto A (ou cardinalidade de A).

Notação:

n(A): é o número de elementos do conjunto A (ou cardinalidade de A).

Exemplo 1:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$$

Notação:

n(A): é o número de elementos do conjunto A (ou cardinalidade de A).

Exemplo 1:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\}$$

Notação:

n(A): é o número de elementos do conjunto A (ou cardinalidade de A).

Exemplo 1:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\}$$

$$= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

Notação:

n(A): é o número de elementos do conjunto A (ou cardinalidade de A).

Exemplo 1:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\}$$
$$= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$\boxed{n(\mathbf{A}) = 7}$$

Questão 2:

É sempre possível contar os elementos de um conjunto?

Questão 2:

É sempre possível contar os elementos de um conjunto?

Exemplo 1:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$$

Questão 2:

É sempre possível contar os elementos de um conjunto?

Exemplo 1:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

Questão 2:

É sempre possível contar os elementos de um conjunto?

Exemplo 1:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

- Como contamos os elementos de A?

Questão 2:

É sempre possível contar os elementos de um conjunto?

Exemplo 1:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

- Como contamos os elementos de A?

=> Enumerando seus elementos:

Questão 2:

É sempre possível contar os elementos de um conjunto?

Exemplo 1:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

- Como contamos os elementos de A?

=> Enumerando seus elementos:

1 é o número -3

Questão 2:

É sempre possível contar os elementos de um conjunto?

Exemplo 1:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

- Como contamos os elementos de A?

=> Enumerando seus elementos:

1 é o número -3
2 é o número -2

Questão 2:

É sempre possível contar os elementos de um conjunto?

Exemplo 1:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

- Como contamos os elementos de A?

=> Enumerando seus elementos:

1 é o número -3
2 é o número -2
⋮ ⋮
7 é o número 3

Questão 2:

É sempre possível contar os elementos de um conjunto?

Exemplo 1:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

- Como contamos os elementos de A?

=> Enumerando seus elementos:

1 é o número -3
2 é o número -2
⋮ ⋮
7 é o número 3

=> Acabamos a enumeração em 7

Questão 2:

É sempre possível contar os elementos de um conjunto?

Questão 2:

É sempre possível contar os elementos de um conjunto?

Exemplo 2:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\} \\ &= \{2, 4, 6, \ldots\} \end{aligned}$$

Questão 2:

É sempre possível contar os elementos de um conjunto?

Exemplo 2:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\} \\ &= \{2, 4, 6, \ldots\} \end{aligned}$$

- Podemos ir enumerando seus elementos, mas nunca acabaremos a enumeração.

Questão 2:

É sempre possível contar os elementos de um conjunto?

Exemplo 2:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\} \\
&= \{2, 4, 6, \ldots\}
\end{aligned}
$$

- Podemos ir enumerando seus elementos, mas nunca acabaremos a enumeração.

Resposta: NEM sempre

Definição:

- Um conjunto é finito se é possível contar o número de seus elementos.

Definição:

- Um conjunto é finito se é possível contar o número de seus elementos.
- Um conjunto é infinito se não é possível contar o número de seus elementos.

Definição:

- Um conjunto é finito se é possível contar o número de seus elementos.
- Um conjunto é infinito se não é possível contar o número de seus elementos.

Exemplo 1:

$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$ é finito

Definição:

- Um conjunto é finito se é possível contar o número de seus elementos.
- Um conjunto é infinito se não é possível contar o número de seus elementos.

Exemplo 1:

$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$ é finito

$\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\}$ é infinito

Definição:

- Um conjunto é finito se é possível contar o número de seus elementos.
- Um conjunto é infinito se não é possível contar o número de seus elementos.

Exemplo 1:

$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$ é finito

$\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\}$ é infinito

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ são conjuntos infinitos.

- É sempre possível contar os elementos de um conjunto finito.

É sempre possível contar os elementos de um conjunto finito. Mas, será que sempre <u>conseguimos</u> contar ?

É sempre possível contar os elementos de um conjunto finito. Mas, será que sempre conseguimos contar ?

Exemplo:

$$\mathbf{C} = \{x \mid x \text{ é uma pessoa que nasceu antes de } 2000\}$$

É sempre possível contar os elementos de um conjunto finito. Mas, será que sempre <u>conseguimos</u> contar ?

Exemplo:

$\mathrm{C} = \{x \mid x \text{ é uma pessoa que nasceu antes de } 2000\}$

<u>então</u>:

- C está bem definido

É sempre possível contar os elementos de um conjunto finito. Mas, será que sempre conseguimos contar ?

Exemplo:

$\mathrm{C} = \{x \mid x \text{ é uma pessoa que nasceu antes de } 2000\}$

então:

- C está bem definido
- C é finito

É sempre possível contar os elementos de um conjunto finito. Mas, será que sempre conseguimos contar ?

Exemplo:

$\mathbf{C} = \{x \mid x \text{ é uma pessoa que nasceu antes de } 2000\}$

então:

- $\mathbf{C}$ está bem definido
- $\mathbf{C}$ é finito
- $n(\mathbf{C})$ é um número que não conhecemos

É sempre possível contar os elementos de um conjunto finito. Mas, será que sempre conseguimos contar ?

Exemplo:

$\mathbf{C} = \{x \mid x \text{ é uma pessoa que nasceu antes de } 2000\}$

então:

- $\mathbf{C}$ está bem definido
- $\mathbf{C}$ é finito
- $n(\mathbf{C})$ é um número que não conhecemos

Conclusão: Embora tenhamos um conjunto finito, pode ser impraticável contá-lo.

- Assumimos, <u>nesta</u> aula:
  - A é um conjunto finito;

Assumimos, nesta aula:

- $\mathbf{A}$ é um conjunto finito;
- É possível determinar o número de elementos de $\mathbf{A}$, $n(\mathbf{A})$.

- Assumimos, nesta aula:
  - $\mathbf{A}$ é um conjunto finito;
  - É possível determinar o número de elementos de $\mathbf{A}$, $n(\mathbf{A})$.

- Questão 3:

Tem uma fórmula para calcular o número de elementos de $A \cup B$?

Introdução ao princípio aditivo:

- Problema inicial:

$$\begin{cases} \underline{\text{Dados}} \text{ os conjuntos A e B,} \\ \underline{\text{calcular}}\ \ n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \end{cases}$$

Introdução ao princípio aditivo:

- Problema inicial:
  - Dados os conjuntos A e B,
  - calcular $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$
- Objetivo:
  - Encontrar uma fórmula para calcular $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$.

Introdução ao princípio aditivo:

- Problema inicial:

  Dados os conjuntos A e B,

  calcular $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$

- Objetivo:
  - Encontrar uma fórmula para calcular $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$.

- Princípio aditivo (para dois conjuntos)

Se A e B são disjuntos $A \cap B = \varnothing$

então

Introdução ao princípio aditivo:

- Problema inicial:

  Dados os conjuntos A e B,

  calcular $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$

- Objetivo:

  - Encontrar uma fórmula para calcular $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$.

- Princípio aditivo (para dois conjuntos)

  Se A e B são disjuntos $A \cap B = \varnothing$

  então $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B})$

Introdução ao princípio aditivo:

- Problema inicial:

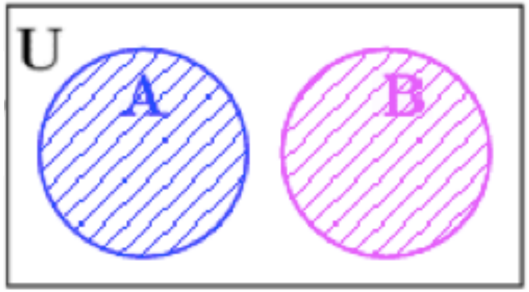
  Dados os conjuntos A e B,
  calcular $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$

- Objetivo:
  - Encontrar uma fórmula para calcular $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$.

- Princípio aditivo (para dois conjuntos)

Se A e B são disjuntos $A \cap B = \varnothing$

então $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B})$



Exemplo 1:

$$\mathbf{U} = \{x \mid x \text{ é aluno do Instituto de Línguas IL }\}$$

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 4^o \text{ ano do curso de inglês}\}$$

$$\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 1^o \text{ ano do curso de inglês}\}$$

Exemplo 1:

$$\mathbf{U} = \{x \mid x \text{ é aluno do Instituto de Línguas IL }\}$$

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 4^o \text{ ano do curso de inglês}\}$$

$$\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 1^o \text{ ano do curso de inglês}\}$$

Problema:

Dados $n(\mathrm{U}) = 300,\ n(\mathbf{A}) = 150,\ n(\mathbf{B}) = 40$

Determinar o número de alunos do IL que está no 1^o ou no 4^o ano do curso de inglês.

Exemplo 1:

$$\mathbf{U} = \{x \mid x \text{ é aluno do Instituto de Línguas IL }\}$$

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 4^o \text{ ano do curso de inglês}\}$$

$$\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 1^o \text{ ano do curso de inglês}\}$$

Problema:

Dados $n(\mathbf{U}) = 300, \ n(\mathbf{A}) = 150, \ n(\mathbf{B}) = 40$

Determinar o número de alunos do IL que está no 1° ou no 4° ano do curso de inglês.

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing \Rightarrow n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) = 190$$

Problema:

Dados os conjuntos A, B e C,

calcular $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C})$

Problema:

Dados os conjuntos A, B e C,

calcular $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C})$

Princípio aditivo (para três conjuntos)

Se $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são disjuntos dois a dois:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing, \quad \mathbf{A} \cap \mathbf{C} = \varnothing, \quad \mathbf{B} \cap \mathbf{C} = \varnothing$$

então

Problema:

Dados os conjuntos A, B e C,

calcular $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C})$

Princípio aditivo (para três conjuntos)

Se $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são disjuntos dois a dois:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing, \quad \mathbf{A} \cap \mathbf{C} = \varnothing, \quad \mathbf{B} \cap \mathbf{C} = \varnothing$$

então $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) + n(\mathbf{C})$

Problema:

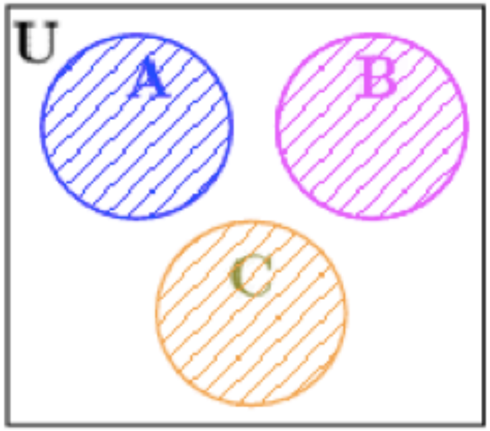
Dados os conjuntos A, B e C,
calcular $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C})$

Princípio aditivo (para três conjuntos)

Se $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são disjuntos dois a dois:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing, \quad \mathbf{A} \cap \mathbf{C} = \varnothing, \quad \mathbf{B} \cap \mathbf{C} = \varnothing$$

então $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) + n(\mathbf{C})$



Problema:

Dados os conjuntos A, B e C,

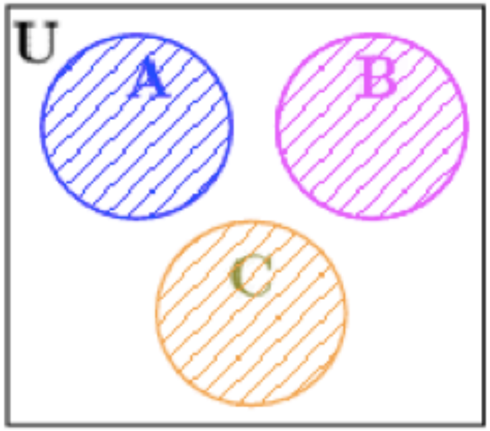
calcular $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C})$

Princípio aditivo (para três conjuntos)

Se $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são disjuntos dois a dois:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing, \quad \mathbf{A} \cap \mathbf{C} = \varnothing, \quad \mathbf{B} \cap \mathbf{C} = \varnothing$$

então $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) + n(\mathbf{C})$



Prova:

$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \quad =$

Problema:

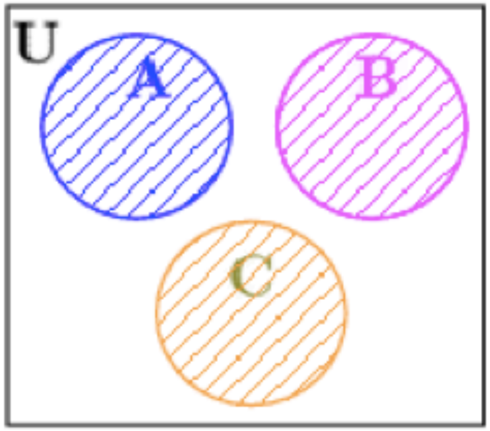
$\begin{cases} \text{Dados os conjuntos A, B e C,} \\ \text{calcular } n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \end{cases}$

Princípio aditivo (para três conjuntos)

Se $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são disjuntos dois a dois:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing, \quad \mathbf{A} \cap \mathbf{C} = \varnothing, \quad \mathbf{B} \cap \mathbf{C} = \varnothing$$

então $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) + n(\mathbf{C})$



Prova:

$$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \quad = \quad n((\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C}) \quad =$$

Problema:

Dados os conjuntos A, B e C,

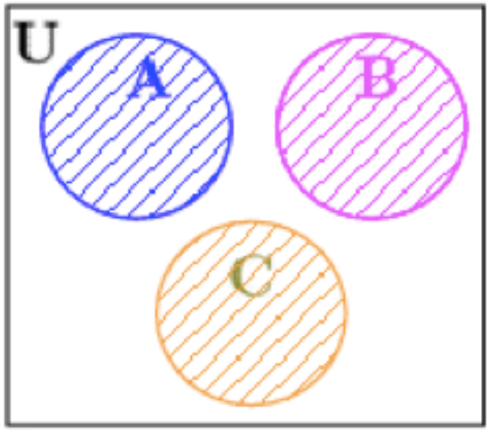
calcular $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C})$

Princípio aditivo (para três conjuntos)

Se $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são disjuntos dois a dois:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing, \quad \mathbf{A} \cap \mathbf{C} = \varnothing, \quad \mathbf{B} \cap \mathbf{C} = \varnothing$$

então $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) + n(\mathbf{C})$



Prova:

$$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = n((\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C}) \overset{(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} = \varnothing}{=}$$

Problema:

Dados os conjuntos A, B e C,

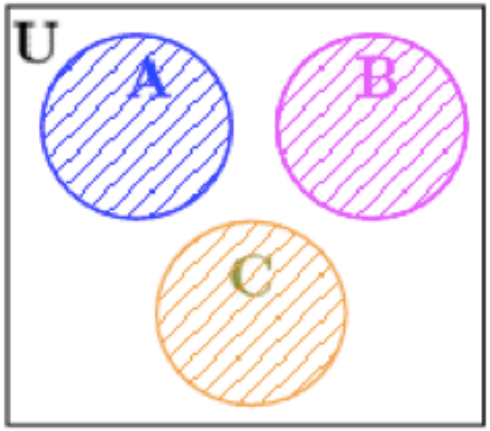
calcular $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C})$

Princípio aditivo (para três conjuntos)

Se $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são disjuntos dois a dois:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing, \quad \mathbf{A} \cap \mathbf{C} = \varnothing, \quad \mathbf{B} \cap \mathbf{C} = \varnothing$$

então $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) + n(\mathbf{C})$



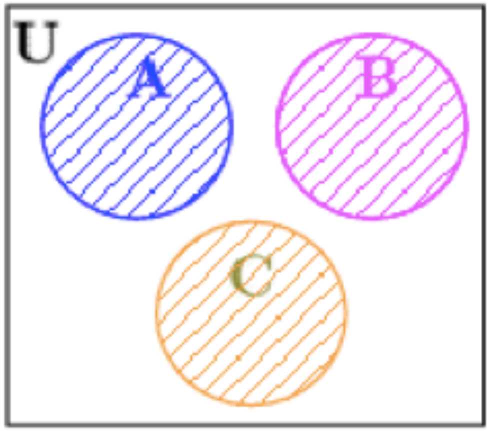
Prova:

$$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = n((\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C}) \overset{(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} = \varnothing}{=} n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) + n(\mathbf{C})$$

Problema:

$\begin{cases} \underline{\text{Dados}} \text{ os conjuntos A, B e C,} \\ \underline{\text{calcular}} \; n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \end{cases}$

Princípio aditivo (para três conjuntos)



<u>Se</u> $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são disjuntos dois a dois:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing, \quad \mathbf{A} \cap \mathbf{C} = \varnothing, \quad \mathbf{B} \cap \mathbf{C} = \varnothing$$

<u>então</u> $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) + n(\mathbf{C})$

Prova:

$$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = n((\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C}) \overset{(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap\mathbf{C}=\varnothing}{=} n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) + n(\mathbf{C})$$

$$\overset{\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\varnothing}{=}$$

Problema:

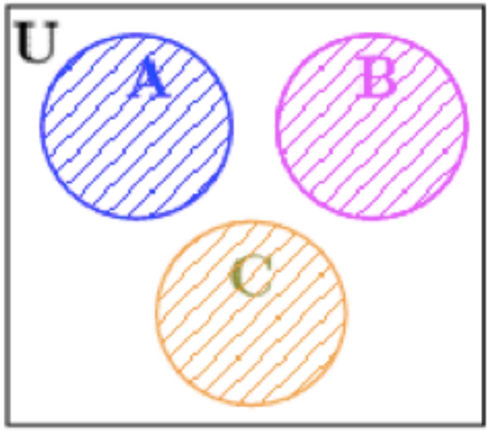
$$\begin{cases} \text{Dados os conjuntos A, B e C,} \\ \text{calcular } n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \end{cases}$$

Princípio aditivo (para três conjuntos)

Se $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são disjuntos dois a dois:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing, \quad \mathbf{A} \cap \mathbf{C} = \varnothing, \quad \mathbf{B} \cap \mathbf{C} = \varnothing$$

então $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) + n(\mathbf{C})$



Prova:

$$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = n((\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C}) \overset{(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap\mathbf{C}=\varnothing}{=} n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) + n(\mathbf{C})$$

$$\overset{\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\varnothing}{=} n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) + n(\mathbf{C})$$

Princípio aditivo (para quatro conjuntos)

Se $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são conjuntos disjuntos dois a dois

$$(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{A} \cap \mathbf{C} = \mathbf{A} \cap \mathbf{D} = \mathbf{B} \cap \mathbf{C} = \mathbf{B} \cap \mathbf{D} = \mathbf{C} \cap \mathbf{D} = \varnothing)$$

então $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C} \cup \mathbf{D}) = n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) + n(\mathbf{C}) + n(\mathbf{D})$

Princípio aditivo (para quatro conjuntos)

Se A, B, C e D são conjuntos disjuntos dois a dois

$$(A \cap B = A \cap C = A \cap D = B \cap C = B \cap D = C \cap D = \varnothing)$$

então $n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D)$

- Tente fazer a prova aplicando o raciocínio anterior.

Prova: $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C} \cup \mathbf{D}) = n((\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C} \cup \mathbf{D})$

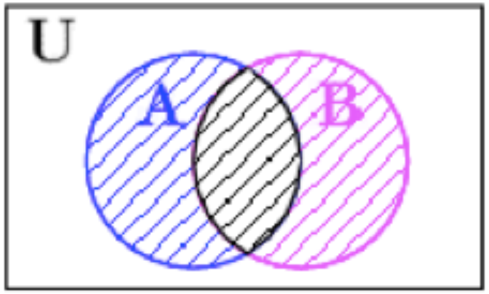
Problema inicial:

$$\begin{cases} \text{\underline{Dados} os conjuntos A e B,} \\ \text{\underline{calcular}} \ n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \end{cases}$$

Problema inicial:

Dados os conjuntos A e B,

calcular $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$



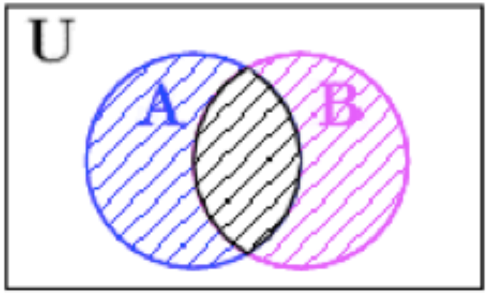
$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = ?$

Problema inicial:

$\begin{cases} \text{Dados os conjuntos A e B,} \\ \text{calcular } n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \end{cases}$

- $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ podem não ser disjuntos

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \varnothing$$



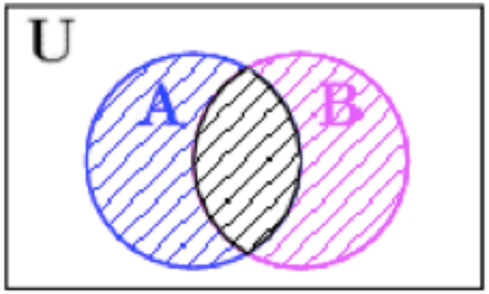
$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = ?$

- Problema inicial:

$\begin{cases} \text{Dados os conjuntos A e B,} \\ \text{calcular } n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \end{cases}$

- A e B podem não ser disjuntos

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \varnothing$$

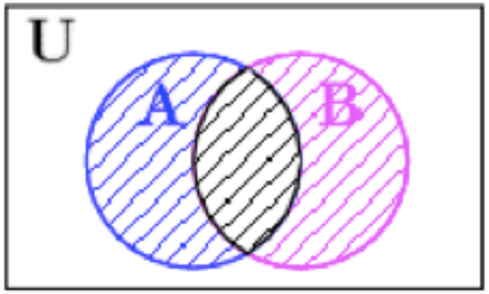


$$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = ?$$

- Objetivo:
  - Encontrar uma fórmula para $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$

Problema inicial:

Dados os conjuntos A e B,
calcular $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$



$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = ?$

- $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ podem não ser disjuntos

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \varnothing$$

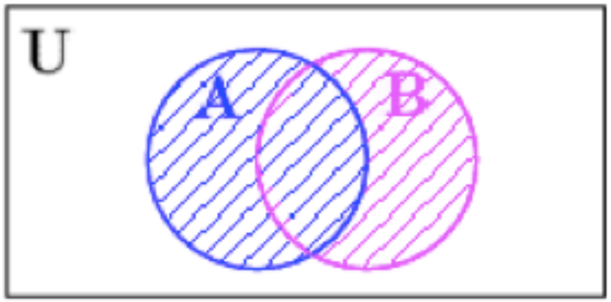
Objetivo:

- Encontrar uma fórmula para $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$

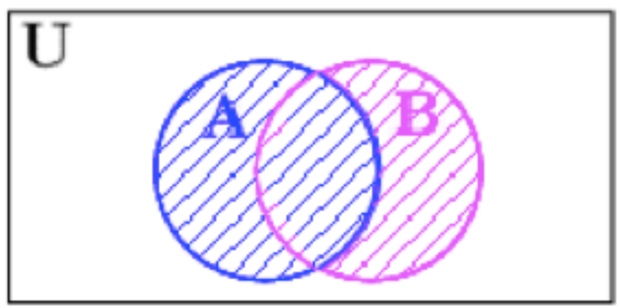
Estratégia:

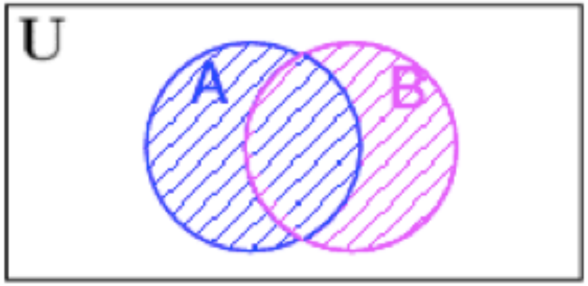
- Reescrever A ∪ B como conjuntos disjuntos.

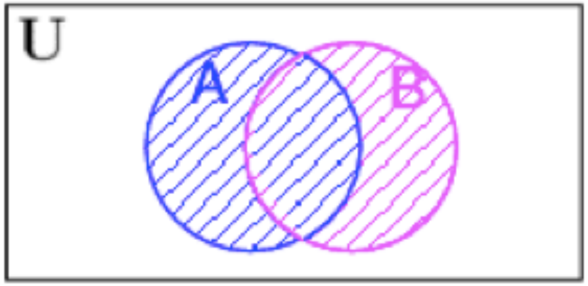
- Dados $A, B, A \cap B \neq \varnothing$

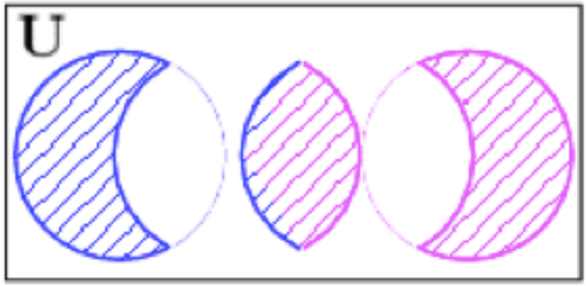


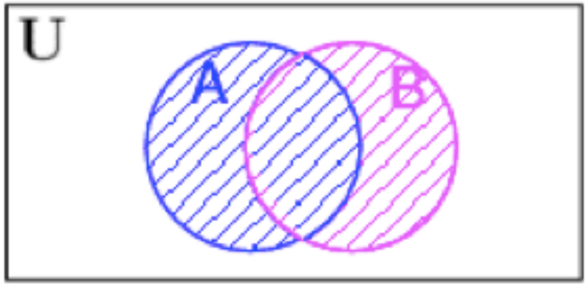
- Como reescrever $A \cup B$ como conjuntos disjuntos?

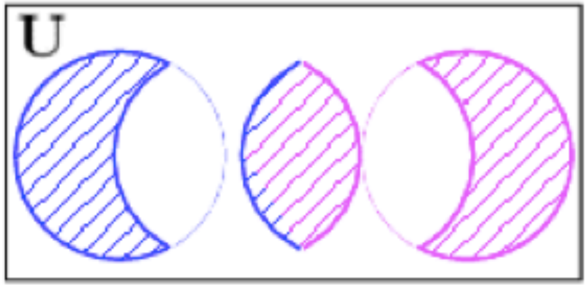



U
A
B

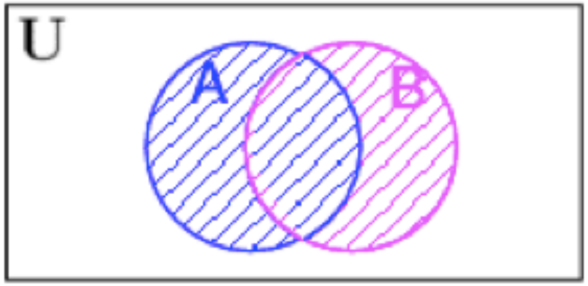

U
A
B

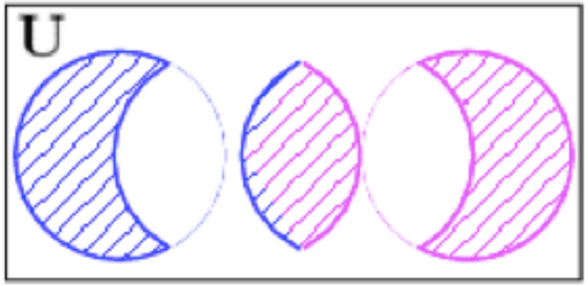

U





Conclusão: $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$



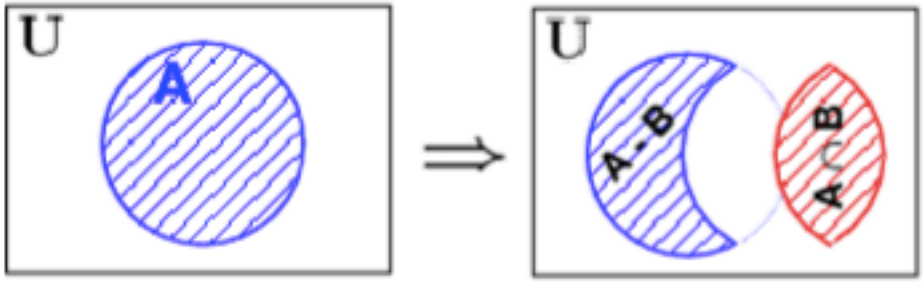


Conclusão: $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} - \mathbf{A})$

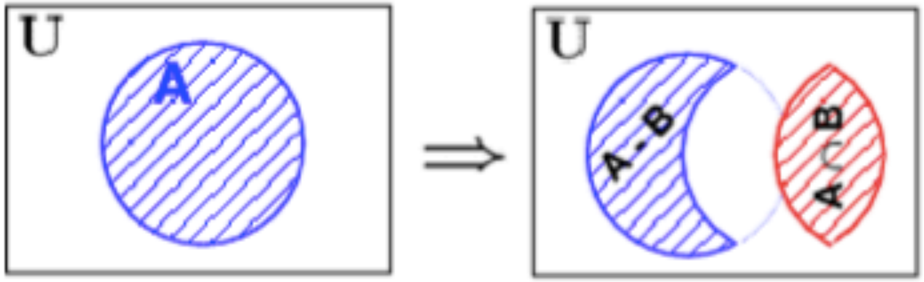
$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = n(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + n(\mathbf{B} - \mathbf{A})$

$$
\begin{aligned}
n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) &= n((\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} - \mathbf{A})) \\
&= n(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + n(\mathbf{B} - \mathbf{A})
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) &= n((\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} - \mathbf{A})) \\ &= n(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + n(\mathbf{B} - \mathbf{A}) \end{aligned}$$

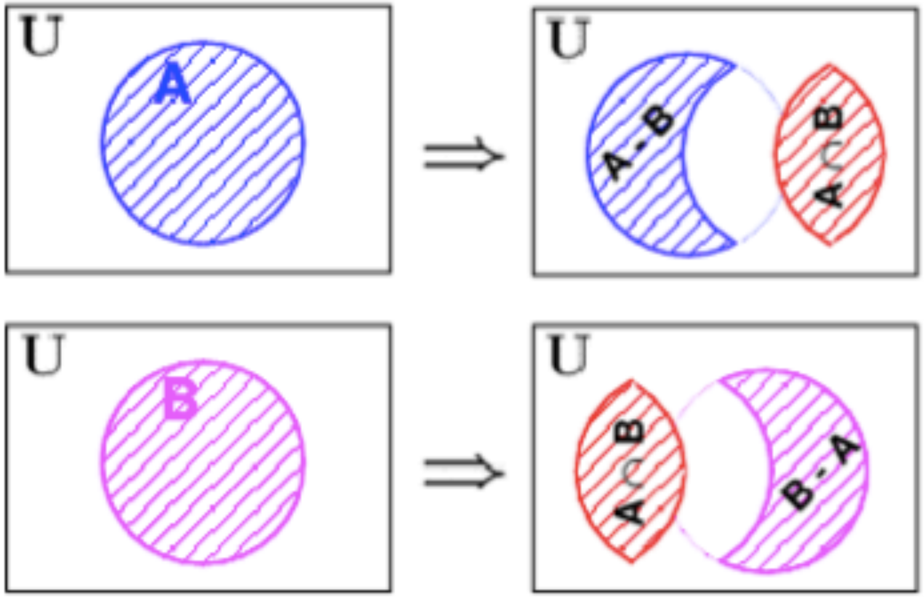


$$
\begin{aligned}
n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) &= n((\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} - \mathbf{A})) \\
&= n(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + n(\mathbf{B} - \mathbf{A})
\end{aligned}
$$



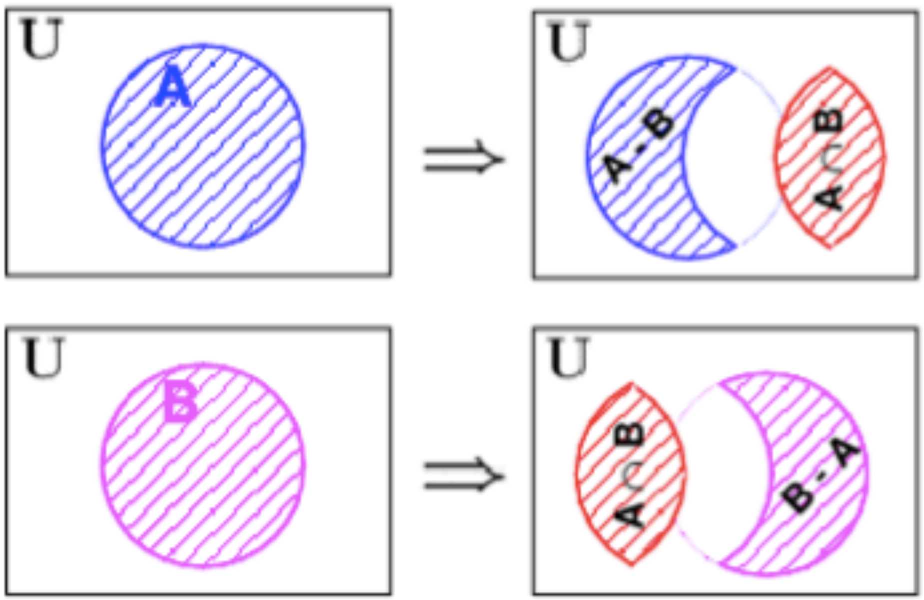
$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

$$
\begin{aligned}
n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) &= n((\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} - \mathbf{A})) \\
&= n(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + n(\mathbf{B} - \mathbf{A})
\end{aligned}
$$



$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

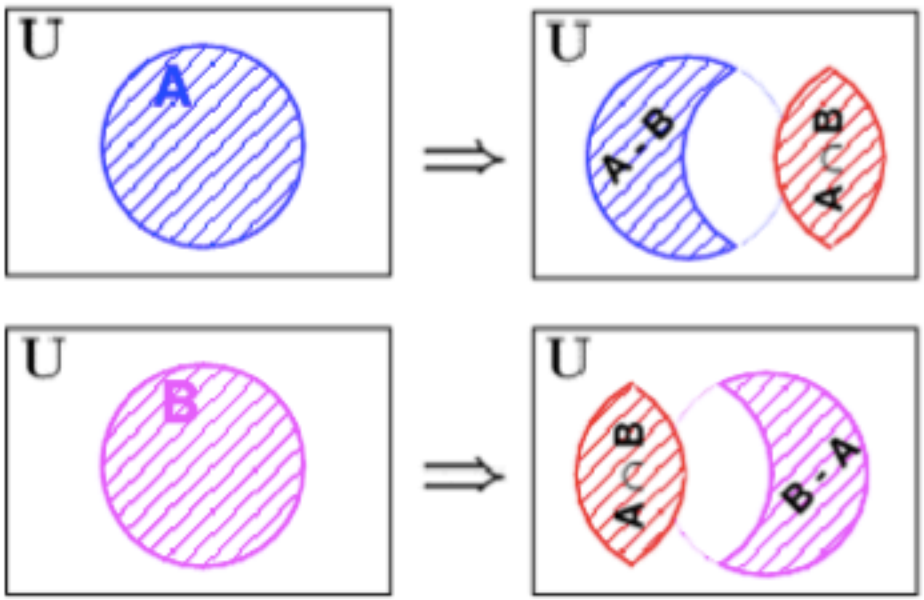
$$
\begin{aligned}
n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) &= n((\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} - \mathbf{A})) \\
&= n(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + n(\mathbf{B} - \mathbf{A})
\end{aligned}
$$



$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} - \mathbf{A})$$

$$
\begin{aligned}
n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) &= n((\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} - \mathbf{A})) \\
&= n(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + n(\mathbf{B} - \mathbf{A})
\end{aligned}
$$

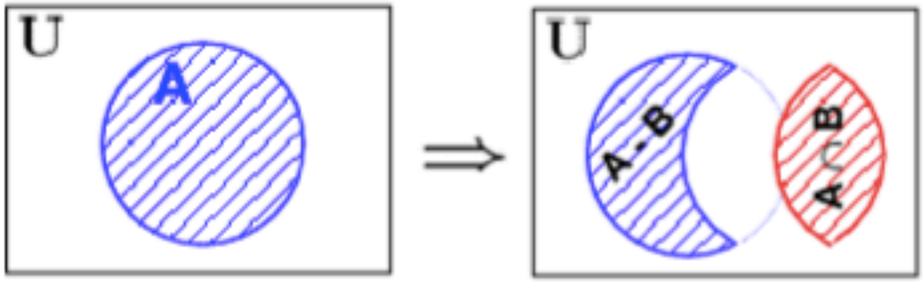


$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

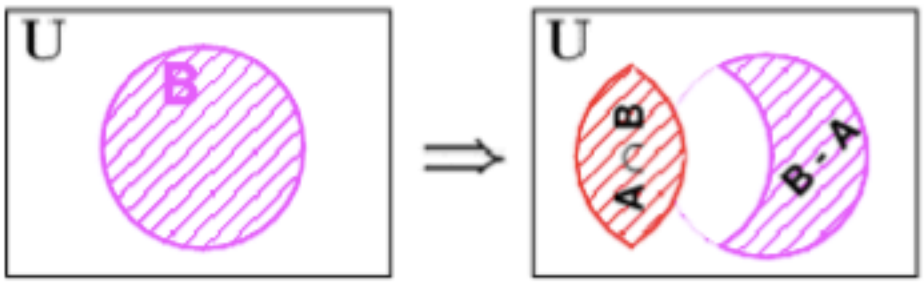
$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} - \mathbf{A})$$

$$n(\mathbf{A}) = n(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

$$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = n((\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} - \mathbf{A}))$$
$$= n(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + n(\mathbf{B} - \mathbf{A})$$



$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$



$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} - \mathbf{A})$$

$$n(\mathbf{A}) = n(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

$$n(\mathbf{B}) = n(\mathbf{B} - \mathbf{A}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

Resumindo:

- $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = n(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + n(\mathbf{B} - \mathbf{A})$

Resumindo:

- $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = n(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + n(\mathbf{B} - \mathbf{A})$
- $n(\mathbf{A}) = n(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$

Resumindo:

- $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = n(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + n(\mathbf{B} - \mathbf{A})$

- $n(\mathbf{A}) = n(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \Rightarrow n(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = n(\mathbf{A}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$

Resumindo:

- $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$
- $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B) \Rightarrow n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
- $n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$

Resumindo:

- $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$
- $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B) \Rightarrow n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
- $n(B) = n(B - A) + n(A \cap B) \Rightarrow n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$

Resumindo:

- $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$
- $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B) \Rightarrow n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
- $n(B) = n(B - A) + n(A \cap B) \Rightarrow n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$

$$n(A \cup B) = [n(A) - n(A \cap B)] + n(A \cap B) + [n(B) - n(A \cap B)]$$

Resumindo:

- $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = n(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + n(\mathbf{B} - \mathbf{A})$
- $n(\mathbf{A}) = n(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \Rightarrow n(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = n(\mathbf{A}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$
- $n(\mathbf{B}) = n(\mathbf{B} - \mathbf{A}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \Rightarrow n(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = n(\mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$

$$\begin{aligned} n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) &= [n(\mathbf{A}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})] + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + [n(\mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})] \\ &= n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \end{aligned}$$

Princípio da inclusão e exclusão (para dois conjuntos)

Dados A e B,

então

$$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

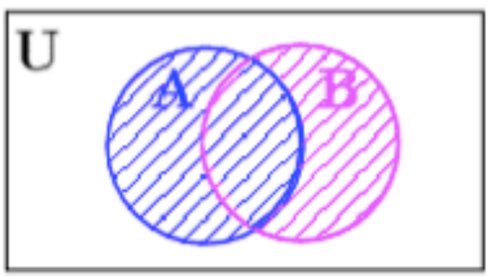
Princípio da inclusão e exclusão (para dois conjuntos)

<u>Dados</u> A e B,

<u>então</u>

$$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

Interpretação visual



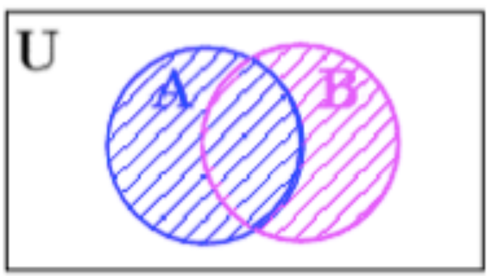
Princípio da inclusão e exclusão (para dois conjuntos)

Dados A e B,

então

$$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

Interpretação visual



$$n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

Exemplo 2:

$$\mathbf{U} = \{x \mid x \text{ é aluno do Instituto de Línguas IL }\}$$

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 4^o \text{ ano do curso de inglês}\}$$

$$\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 2^o \text{ ano do curso de francês}\}$$

<u>dados</u>: $n(\mathbf{U}) = 300$ $n(\mathbf{A}) = 40$

$n(\mathbf{B}) = 20$ $n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = 2$

Exemplo 2:

$$\mathbf{U} = \{x \mid x \text{ é aluno do Instituto de Línguas IL }\}$$

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 4^o \text{ ano do curso de inglês}\}$$

$$\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 2^o \text{ ano do curso de francês}\}$$

<u>dados</u>: $n(\mathbf{U}) = 300$ $\quad n(\mathbf{A}) = 40$

$n(\mathbf{B}) = 20$ $\quad n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = 2$

<u>então</u> o número de alunos do IL que cursam o 4^o ano de inglês <u>ou</u> o 2^o ano de francês é:

$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$

Exemplo 2:

$$\mathbf{U} = \{x \mid x \text{ é aluno do Instituto de Línguas IL }\}$$

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 4^o \text{ ano do curso de inglês}\}$$

$$\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 2^o \text{ ano do curso de francês}\}$$

<u>dados</u>: $n(\mathbf{U}) = 300$ $n(\mathbf{A}) = 40$

$n(\mathbf{B}) = 20$ $n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = 2$

<u>então</u> o número de alunos do IL que cursam o 4^{o} ano de inglês <u>ou</u> o 2^{o} ano de francês é:

$$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

Exemplo 2:

$$\mathbf{U} = \{x \mid x \text{ é aluno do Instituto de Línguas IL } \}$$

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 4^o \text{ ano do curso de inglês}\}$$

$$\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 2^o \text{ ano do curso de francês}\}$$

<u>dados</u>: $n(\mathbf{U}) = 300$ $\quad n(\mathbf{A}) = 40$

$n(\mathbf{B}) = 20$ $\quad n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = 2$

<u>então</u> o número de alunos do IL que cursam o 4^o ano de inglês <u>ou</u> o 2^o ano de francês é:

$$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = 40 + 20 - 2 = 58$$

Questão:

Como calcular $n(A \cup B \cup C)$ usando o Princípio da inclusão e exclusão para <u>dois conjuntos</u>?

Questão:

Como calcular $n(A \cup B \cup C)$ usando o Princípio da inclusão e exclusão para dois conjuntos?

$$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = n((\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C})$$

Questão:

Como calcular $n(A \cup B \cup C)$ usando o Princípio da inclusão e exclusão para dois conjuntos?

$$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = n((\underbrace{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}}) \cup \mathbf{C})$$

$$= \; n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) + n(\mathbf{C}) - n((\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C})$$

Questão:

Como calcular $n(A \cup B \cup C)$ usando o Princípio da inclusão e exclusão para dois conjuntos?

$$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = n((\underbrace{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}}) \cup \mathbf{C})$$

$$= \quad n(\underbrace{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}}) + n(\mathbf{C}) - n(\underline{(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C}})$$

$$= \quad [n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})] + n(\mathbf{C}) - n((\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}))$$

Questão:

Como calcular $n(A \cup B \cup C)$ usando o Princípio da inclusão e exclusão para <u>dois conjuntos</u>?

$$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = n((\underbrace{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}}) \cup \mathbf{C})$$

$$= \quad n(\underbrace{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}}) + n(\mathbf{C}) - n(\underline{(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C}})$$

$$= \quad [n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})] + n(\mathbf{C}) - n((\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}))$$

$$= \quad n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) + n(\mathbf{C}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

$$-[n(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) + n(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) - n((\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C})]$$

Questão:

Como calcular n(A ∪ B ∪ C) usando o Princípio da inclusão e exclusão para <u>dois conjuntos</u>?

$$
\begin{aligned}
n(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}\cup\mathbf{C}) &= n((\underbrace{\mathbf{A}\cup\mathbf{B}})\cup\mathbf{C})\\
&= n(\underbrace{\mathbf{A}\cup\mathbf{B}}) + n(\mathbf{C}) - n(\underline{(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap\mathbf{C}})\\
&= [n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) - n(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})] + n(\mathbf{C}) - n((\mathbf{A}\cap\mathbf{C})\cup(\mathbf{B}\cap\mathbf{C}))\\
&= n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) + n(\mathbf{C}) - n(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})\\
&\quad - [n(\mathbf{A}\cap\mathbf{C}) + n(\mathbf{B}\cap\mathbf{C}) - \underbrace{n((\mathbf{A}\cap\mathbf{C})\cap(\mathbf{B}\cap\mathbf{C}))}_{\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\cap\mathbf{C}}]
\end{aligned}
$$

Questão:

Como calcular n(A ∪ B ∪ C) usando o Princípio da inclusão e exclusão para dois conjuntos?

$$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = n((\underbrace{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}}) \cup \mathbf{C})$$

$$= \quad n(\underbrace{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}}) + n(\mathbf{C}) - n(\underline{(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C}})$$

$$= \quad [n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})] + n(\mathbf{C}) - n((\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}))$$

$$= \quad n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) + n(\mathbf{C}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

$$- [n(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) + n(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) - n(\underbrace{(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}}_{\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}})]$$

$$= n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) + n(\mathbf{C}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) - n(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C})$$

Princípio da inclusão e exclusão (para três conjuntos)

Dados $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$,

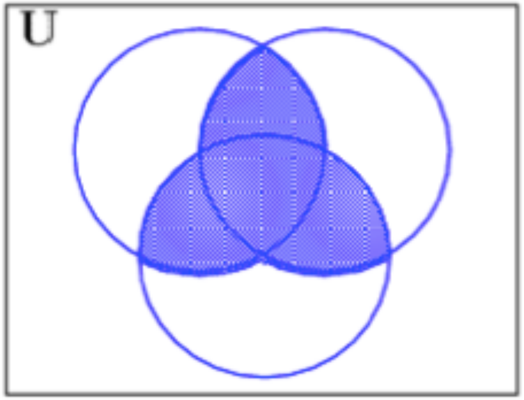
então
$$\begin{aligned} n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) &= n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) + n(\mathbf{C}) \\ &- n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) - n(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) \\ &+ n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}) \end{aligned}$$

Princípio da inclusão e exclusão (para três conjuntos)

Dados $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$,

então
$$
\begin{aligned}
n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) &= n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) + n(\mathbf{C}) \\
&\quad - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) - n(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) \\
&\quad + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C})
\end{aligned}
$$

- Interpretação gráfica:



Exemplo 3:

$$\mathbf{U} = \{x \mid x \text{ é aluno do Instituto de Línguas IL }\}$$

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 4^o \text{ ano do curso de inglês}\}$$

$$\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 2^o \text{ ano do curso de francês}\}$$

$$\mathbf{C} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 1^o \text{ ano do curso de italiano}\}$$

Exemplo 3 (continuação):

Dados: $n(\mathbf{U}) = 300,\ n(\mathbf{A}) = 40,\ n(\mathbf{B}) = 20,\ n(\mathbf{C}) = 30$

$n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = 2$ $\quad$ $n(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) = 5$

$n(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = 3$ $\quad$ $n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = 1$

então o número de alunos do IL que estão cursando o 4º ano de inglês ou o 2º ano de francês ou o 1º ano de italiano é:

Exemplo 3 (continuação):

Dados: $n(\mathbf{U}) = 300,\ n(\mathbf{A}) = 40,\ n(\mathbf{B}) = 20,\ n(\mathbf{C}) = 30$

$n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = 2$ $\quad$ $n(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) = 5$

$n(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = 3$ $\quad$ $n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = 1$

então o número de alunos do IL que estão cursando o 4º ano de inglês ou o 2º ano de francês ou o 1º ano de italiano é:

$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) =$

Exemplo 3 (continuação):

Dados: $n(\mathbf{U}) = 300,\ n(\mathbf{A}) = 40,\ n(\mathbf{B}) = 20,\ n(\mathbf{C}) = 30$

$n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = 2$ $\qquad$ $n(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) = 5$

$n(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = 3$ $\qquad$ $n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = 1$

então o número de alunos do IL que estão cursando o 4º ano de inglês ou o 2º ano de francês ou o 1º ano de italiano é:

$$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) =$$

$$= n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) + n(\mathbf{C}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) - n(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C})$$

Exemplo 3 (continuação):

Dados: $n(\mathbf{U}) = 300,\ n(\mathbf{A}) = 40,\ n(\mathbf{B}) = 20,\ n(\mathbf{C}) = 30$

$n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = 2$ $\qquad$ $n(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) = 5$

$n(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = 3$ $\qquad$ $n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = 1$

então o número de alunos do IL que estão cursando o 4º ano de inglês ou o 2º ano de francês ou o 1º ano de italiano é:

$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) =$

$= n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) + n(\mathbf{C}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) - n(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C})$

$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = 40 + 20 + 30 - 2 - 5 - 3 + 1 = 81$

Observação:

A partir de $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$ podemos obter outras relações.

Observação:

A partir de $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$ podemos obter outras relações.

Exemplo:

Determine a quantidade de números naturais que existe entre 1 e 100 inclusive e que não são divisíveis por 2 nem por 5.

Observação:

A partir de $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$ podemos obter outras relações.

Exemplo:

Determine a quantidade de números naturais que existe entre 1 e 100 inclusive e que não são divisíveis por 2 nem por 5.

$$\mathbf{C} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100\}$$

Observação:

A partir de $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$ podemos obter outras relações.

Exemplo:

Determine a quantidade de números naturais que existe entre 1 e 100 inclusive e que não são divisíveis por 2 nem por 5.

$$\mathbf{C} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100\}$$

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C}, x = 2k, k \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \ldots, 100\}$$

Observação:

A partir de $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$ podemos obter outras relações.

Exemplo:

Determine a quantidade de números naturais que existe entre 1 e 100 inclusive e que não são divisíveis por 2 nem por 5.

$$\mathbf{C} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100\}$$

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C}, x = 2k, k \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \ldots, 100\}$$

$$\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C}, x = 5k, k \in \mathbb{N}\} = \{5, 10, 15, \ldots, 100\}$$

Observação:

A partir de $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$ podemos obter outras relações.

Exemplo:

Determine a quantidade de números naturais que existe entre 1 e 100 inclusive e que não são divisíveis por 2 nem por 5.

$$\mathbf{C} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100\}$$

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C}, x = 2k, k \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \ldots, 100\}$$

$$\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C}, x = 5k, k \in \mathbb{N}\} = \{5, 10, 15, \ldots, 100\}$$

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C}, x \notin \mathbf{A} \text{ e } x \notin \mathbf{B}\}$$

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C} \text{ e } x \notin \mathbf{A} \text{ e } x \notin \mathbf{B}\}$$

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C} \text{ e } x \notin \mathbf{A} \text{ e } x \notin \mathbf{B}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C} \text{ e } (x \in \overline{\mathbf{A}} \text{ e } x \in \overline{\mathbf{B}})\}$$

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C} \text{ e } x \notin \mathbf{A} \text{ e } x \notin \mathbf{B}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C} \text{ e } (x \in \overline{\mathbf{A}} \text{ e } x \in \overline{\mathbf{B}})\}$$

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C} \text{ e } (x \in \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}})\}$$

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C} \text{ e } x \notin \mathbf{A} \text{ e } x \notin \mathbf{B}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C} \text{ e } (x \in \overline{\mathbf{A}} \text{ e } x \in \overline{\mathbf{B}})\}$$

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C} \text{ e } (x \in \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}})\}$$

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C} \text{ e } x \in (\overline{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}})\}$$

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C} \text{ e } x \notin \mathbf{A} \text{ e } x \notin \mathbf{B}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C} \text{ e } (x \in \overline{\mathbf{A}} \text{ e } x \in \overline{\mathbf{B}})\}$$

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C} \text{ e } (x \in \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}})\}$$

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C} \text{ e } x \in (\overline{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}})\}$$

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C} \text{ e } x \notin (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})\}$$

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C} \text{ e } x \notin \mathbf{A} \text{ e } x \notin \mathbf{B}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C} \text{ e } (x \in \overline{\mathbf{A}} \text{ e } x \in \overline{\mathbf{B}})\}$$

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C} \text{ e } (x \in \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}})\}$$

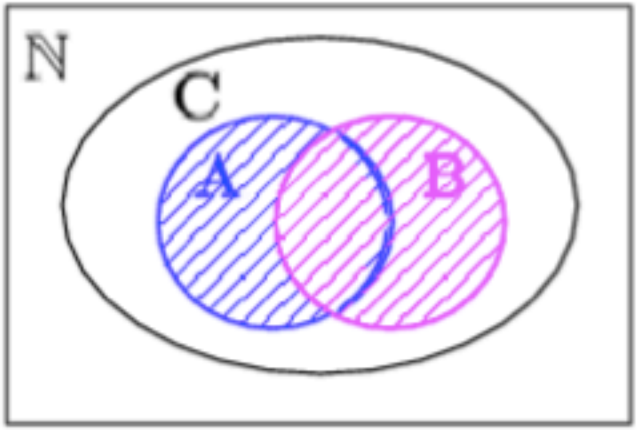
$$= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C} \text{ e } x \in (\overline{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}})\}$$

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C} \text{ e } x \notin (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})\}$$

$$= \mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$$

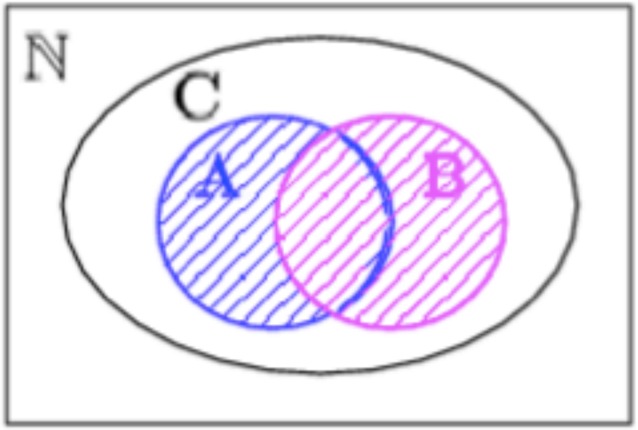
Lembremos o enunciado do exemplo:

Determine a quantidade de números naturais que existe entre 1 e 100 e não são divisíveis por 2 nem por 5.



Lembremos o enunciado do exemplo:

Determine a quantidade de números naturais que existe entre 1 e 100 e não são divisíveis por 2 nem por 5.



Conclusão:

Pede-se $n(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}))$

- Observe que:

$$(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) \cup (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{C}$$

- Observe que:

$$(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) \cup (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{C}$$

e $$(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \varnothing$$

- Observe que:

$$(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) \cup (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{C}$$

e $$(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \varnothing$$

$$\Rightarrow n((\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) \cup (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}))$$

- Observe que:

$$(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) \cup (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{C}$$

e $$(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \varnothing$$

$$\Rightarrow n((\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) \cup (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) \overset{\text{princípio aditivo}}{=} n(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) + n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$$

⇒ Observe que:

$$(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) \cup (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{C}$$

e $$(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \varnothing$$

$$\Rightarrow \underbrace{n((\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) \cup (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}))}_{n(\mathbf{C})} \overset{\text{princípio aditivo}}{=} n(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) + n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$$

Observe que:

$$(\mathbf{C}-(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}))\cup(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})=\mathbf{C}$$

e $$(\mathbf{C}-(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}))\cap(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})=\varnothing$$

$$\Rightarrow \underbrace{n((\mathbf{C}-(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}))\cup(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}))}_{n(\mathbf{C})} \overset{\text{princípio aditivo}}{=} n(\mathbf{C}-(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}))+n(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})$$

$$\Rightarrow n(\mathbf{C}-(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}))$$

Observe que:

$$(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) \cup (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{C}$$

e $$(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \varnothing$$

$$\Rightarrow \underbrace{n((\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) \cup (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}))}_{n(\mathbf{C})} \overset{\substack{\text{princípio} \\ \text{aditivo}}}{=} n(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) + n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$$

$$\Rightarrow n(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) = n(\mathbf{C}) - n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$$

Resumindo:

Devemos calcular $n(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) = n(\mathbf{C}) - n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$

Resumindo:

<u>Devemos</u> calcular $n(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) = n(\mathbf{C}) - n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$

$\mathbf{C} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100\}$

Resumindo:

Devemos calcular $n(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) = n(\mathbf{C}) - n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$

$$\mathbf{C} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100\}$$

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C}, x = 2k, k \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \ldots, 100\}$$

Resumindo:

<u>Devemos calcular</u> $n(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) = n(\mathbf{C}) - n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$

$$\mathbf{C} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100\}$$

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C}, x = 2k, k \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \ldots, 100\}$$

$$\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C}, x = 5k, k \in \mathbb{N}\} = \{5, 10, 15, \ldots, 100\}$$

Resumindo:

Devemos calcular $n(\mathbf{C}-(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}))=n(\mathbf{C})-n(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})$

$$\mathbf{C}=\{x\in\mathbb{N}\mid 1\leq x\leq 100\}$$

$$\mathbf{A}=\{x\in\mathbb{N}\mid x\in\mathbf{C}, x=2k, k\in\mathbb{N}\}=\{2,4,6,\ldots,100\}$$

$$\mathbf{B}=\{x\in\mathbb{N}\mid x\in\mathbf{C}, x=5k, k\in\mathbb{N}\}=\{5,10,15,\ldots,100\}$$

$$n(\mathbf{C})=100$$

Resumindo:

Devemos calcular $n(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) = n(\mathbf{C}) - n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$

$$\mathbf{C} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100\}$$

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C}, x = 2k, k \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \ldots, 100\}$$

$$\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C}, x = 5k, k \in \mathbb{N}\} = \{5, 10, 15, \ldots, 100\}$$

$n(\mathbf{C}) = 100$

$$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \underset{\text{inclusão e exclusão}}{\overset{\text{princípio}}{=}} n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

Resumindo:

Devemos calcular $n(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) = n(\mathbf{C}) - n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$

$$\mathbf{C} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100\}$$

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C}, x = 2k, k \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \ldots, 100\}$$

$$\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C}, x = 5k, k \in \mathbb{N}\} = \{5, 10, 15, \ldots, 100\}$$

$$n(\mathbf{C}) = 100$$

$$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \overset{\text{princípio}}{\underset{\text{inclusão e exclusão}}{=}} n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

$$= 50 + 20 - 10 = 60$$

Resumindo:

Devemos calcular $n(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) = n(\mathbf{C}) - n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$

$$\mathbf{C} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100\}$$

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C}, x = 2k, k \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \ldots, 100\}$$

$$\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C}, x = 5k, k \in \mathbb{N}\} = \{5, 10, 15, \ldots, 100\}$$

$n(\mathbf{C}) = 100$ $\quad$ $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \underset{\text{inclusão e exclusão}}{\overset{\text{princípio}}{=}} n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$

$$= 50 + 20 - 10 = 60$$

logo, $n(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) = 100 - 60 = 40$

Exercícios

1. Sejam A e B dois subconjuntos de um conjunto universo $\mathbf{U}$ tais que $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$. Usando o princípio aditivo prove que $n(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = n(\mathbf{A}) - n(\mathbf{B})$.

2. Quantos números inteiros entre 1 e 100 inclusive são divisíveis por 3 ou por 7.

Dica: Considere

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 100 \text{ e } x = 3k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 100 \text{ e } x = 7k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}$$

e use o princípio de inclusão e exclusão.

3. Use os princípios aditivo ou de inclusão e exclusão para determinar, em cada caso, a quantidade de números naturais entre 1 e 60 que verificam:

(i) são divisíveis por 2 e por 3

(ii) são divisíveis por 2 ou por 3

(iii) não são divisíveis nem por 2 nem por 3

(iv) são ímpares divisíveis por 3 ou são divisíveis por 2

(v) são divisíveis por 2 ou por 3 ou por 5

4. Foram consultadas 200 pessoas que estavam pesquisando preços de televisores em lojas de eletrodomésticos. As respostas foram as seguintes:

- 40% perguntaram pela marca A;
- 35% pela marca B;
- 10% pelas marcas A e B;
- 25% somente perguntaram por outras marcas.

Use o princípio de adição ou o princípio da inclusão e exclusão para determinar:

4. (continuação)

(i) quantidade de pessoas que perguntaram pelos preços das televisões de marcas A ou B.

(ii) número de pessoas que perguntaram pela marca A e não pela marca B (lembre-se do exercício 1).